10/03/2015

$A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 92

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $m_A(x) = \chi_A(x) = (x-1)^2$

ΑΠΟΔ. Εύκολος υπολογισμός δίνει $\chi_A(x) = (x-1)^2$ Επομένως, από Cayley-Hamilton (ή υπολογισμό) $(A - I_2)^2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$. Άρα το $(x-1)^2$ μηδενίζει τον A και (φανερά) είναι μονικό. Πρέπει ν.δ.ο δεν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $q(x)$ βαθμού <2 με $p(A)=0$. Αφού μη μηδενικά σταθερά πολυώνυμα δεν μηδενίζουν τον A, αρκεί ν.δ.ο αν $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ μονικό βαθμού 1 τότε $q(A) = \mathbb{O}_{2\times 2}$. Πράγματι, τότε $q(x) = x + c$ με $c \in \mathbb{R}$ και $q(A) = \mathbb{O}_{2\times 2} \Leftrightarrow$ $A + cI_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$ που δεν συμβαίνει γιατί ο A δεν είναι διαγώνιος. Άρα $m_A(x) = (x-1)^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 93

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$. Υποθέτουμε $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $p(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Τότε το $m_A(x)$ διαιρεί το $p(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από διαίρεση πολυωνύμων υπάρχουν $p(x) = \pi(x) m_A(x) + v(x)$ ⊛ και ή $v(x) = 0$ ή $v(x) \neq 0$ και $\deg v(x) < \deg m_A(x)$. Υποθέτουμε ότι $v(x) \neq 0$ και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Πράγματι, η ⊛ δίνει $\mathbb{O}_{\nu\times\nu} = p(A) = \pi(A) m(A) + v(A) = \pi(A)\mathbb{O}_{\nu\times\nu} + v(A) \Rightarrow v(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$ Επομένως έχουμε αντίφαση στο $m_A(x)$ ελάχιστο πολυώνυμο του A γιατί $\deg v(x) < \deg m_A(x)$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τα πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $p(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$ είναι ακριβώς τα πολ/σια (στο $\mathbb{F}[x]$) του $m_A(x)$

b

ΠΟΡΙΣΜΑ 94

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολ/μο $\chi_A(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από Θεώρημα 90 (Cayley-Hamilton) $\chi_A(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Επομένως το αποτέλεσμα έπεται από Πρόταση 93.

ΠΡΟΤΑΣΗ 95 (Χωρίς απόδειξη)

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Γράφουμε $\chi_A(x) = (-1)\,(p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} \cdots (p_t(x))^{k_t}$ όπου $p_i(x)$ μονικά ανάγωγα στο $\mathbb{F}[x]$, $p_i(x) \neq p_j(x)$ για $i \neq j$ ...

Από Πόρισμα 94, το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$, επομένως, υπάρχουν ακέραιοι l_i με $0 \le l_i \le k$, ώστε $m_A(x) = (p_1(x))^{l_1} \cdot (p_2(x))^{l_2} \cdot \ldots \cdot (p_t(x))^{l_t}$
Ισχυριζόμαστε ότι $l_i \ge 1$ για κάθε $1 \le i \le t$. Με άλλα λόγια, ένα ανάγωγο πολ/μο διαιρεί το $m_A(x)$ αν και μόνο αν διαιρεί το $\chi_A(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96
Έστω $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με $\chi_A(x) = -(x-2)(x-3)^2(x^2+2)^2$. Ποια είναι τα πιθανά $m_A(x)$;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αφού $x^2+2 \in \mathbb{R}[x]$ ανάγωγο (αφού βαθμού 2 και δεν έχει ρίζα), από πρόταση 95 υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ με $1 \le a, b \le 2$ ώστε $m_A(x) = (x-2)(x-3)^a(x^2+2)^b$

Άρα $m_A(x) = (x-2)(x-3)(x^2+2)$
ή $m_A(x) = (x-2)(x-3)^2(x^2+2)$
ή $m_A(x) = (x-2)(x-3)(x^2+2)^2$
ή $m_A(x) = (x-2)(x-3)^2(x^2+2)^2 = \chi_A(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 97
Έστω $A \in \mathbb{F}^{5\times 5}$ με $m_A(x) = (x-1)(x-3)^2$. Ποια είναι τα πιθανά $\chi_A(x)$;
ΛΥΣΗ: Από πρόταση 95 και αφού $\deg\{\chi_A(x)\} = 5$ υπάρχουν οι εξής 3 περιπτώσεις
$\chi_A(x) = (-1)(x-1)^3(x-3)^2$
ή $\chi_A(x) = (-1)(x-1)^2(x-3)^3$
ή $\chi_A(x) = (-1)(x-1)(x-3)^4$

ΠΡΟΤΑΣΗ 98
Έστω $A, P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με P αντιστρέψιμο. Έστω $\lambda(x) \in \mathbb{F}[x]$. Τότε $\lambda(P^{-1}AP) = P^{-1}\lambda(A)P$ (*)
Σαν συμπέρασμα αφού P αντιστρέψιμος, αφού $\lambda(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} \iff \lambda(P^{-1}AP) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από Πρόταση 77 $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ για κάθε $k \ge 0$. Σαν συμπέρασμα, η (*) έπεται. Για το συμπέρασμα $\lambda(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} \Rightarrow P^{-1}\lambda(A)P = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} \overset{*}{\Rightarrow} \lambda(P^{-1}AP) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$
Αντίστροφα $\lambda(P^{-1}AP) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} \overset{*}{\Rightarrow} P^{-1}\lambda(A)P = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} \Rightarrow P(P^{-1}\lambda(A)P)P^{-1} = P\mathbb{O}_{\nu\times\nu}P^{-1} = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$
$\Rightarrow \lambda(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

ΠΟΡΙΣΜΑ 99
Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ όμοιοι. Τότε τα ελάχιστά τους πολυώνυμα είναι ίσα. Δηλαδή
$m_A(x) = m_B(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού A,B όμοιοι, υπάρχει $P\in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος με $B=P^{-1}AP$. Σαν συμπέρασμα για $\lambda(x)\in \mathbb{F}[x]$ η Πρόταση 98 δίνει $\lambda(A)=\mathbb{O}_{\nu\times\nu} \iff \lambda(B)=\mathbb{O}_{\nu\times\nu}$. Το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του ελάχιστου πολυωνύμου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 100

Έστω $D\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγώνιος

Υποθέτουμε $\lambda_i\in\mathbb{F}$ για $1\le i\le p$, ότι $\lambda_i\neq\lambda_j$ για $i\neq j$, ότι $q_i\ge 1$ για $1\le i\le p$ και ότι το λ_i εμφανίζεται ακριβώς q_i φορές στη διαγώνιο του D. Τότε $\chi_A(x)=(-1)^{\nu}(x-\lambda_1)^{q_1}(x-\lambda_2)^{q_2}\cdots(x-\lambda_p)^{q_p}$ και $m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_p)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ο τύπος για το $\chi_D(x)$ είναι άμεσος. Από Πρόταση 95 υπάρχουν $b_1,b_2,\dots,b_p$ ακέραιοι με $1\le b_i\le q_i$ για $1\le i\le p$ ώστε $m_D(x)=(x-\lambda_1)^{b_1}\cdots(x-\lambda_p)^{b_p}$

Εύκολα βλέπουμε (άσκηση) ότι $(D-\lambda_1 I_\nu)(D-\lambda_2 I_\nu)\cdots(D-\lambda_p I_\nu)=\mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

Άρα $b_i=1$ για κάθε i

(π.χ. αν $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_1\end{bmatrix}$ τότε $D-\lambda_1 I_3=\begin{bmatrix}0 & & 0\\ & \lambda_2-\lambda_1 & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}$

$D-\lambda_2 I_3=\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & \lambda_1-\lambda_2\end{bmatrix}$ Άρα $(D-\lambda_1 I_3)(D-\lambda_2 I_3)=\mathbb{O}_{3\times3}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 101 ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

→ ΠΡΟΤΑΣΗ 102

Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο A είναι διαγωνίσιμος

(ii) Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων

(δηλαδή υπάρχουν $\lambda_i\in\mathbb{F}$, για $1\le i\le p$ με $\lambda_i\neq\lambda_j$ για $i\neq j$ ώστε $m_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_p)$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i) ⇒ (ii) Αφού A διαγωνίσιμος υπάρχει διαγώνιος πίνακας D με A, D όμοιοι. Από Πρόταση 100 η ιδιότητα του (ii) ισχύει για D. Άρα από Πρόταση 99 όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο $m_A(x)$ το αποτέλεσμα έπεται.

(ii) ⇒ (i) Χωρίς απόδ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγωνίσιμος με $X_A(x)=(-1)^\nu x^\nu$. Ισχυριζόμαστε ότι $A=\mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού A διαγωνίσιμος $m_A(x)$ διαιρεί το $X_A(x)$ από Πρόταση 102

$\Rightarrow m_A(x)=x \Rightarrow \mathbb{O}_{\nu\times\nu}=m_A(A)=A$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Έστω $A=\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ άνω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία 0, τότε A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow A=\mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 103

Έστω $V\neq\{0_V\}$ διαν. χώρος, πεπερασμένης διάστασης και $f:V\to V$ γραμμική τότε $X_f(f)=$ (η μηδενική απεικόνιση $V\to V$), όπου $X_f(x)\in\mathbb{F}[x]$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f (Ορισμός 57)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $e=(e_1,e_2,\dots,e_\nu)$ διατετ. βάση του V και $A=[f]_e^e$. Από Πρόταση $X_A(x)=X_f(x)$. Από Θεώρημα Cayley-Hamilton $X_A(x)=\mathbb{O}_{\nu\times\nu}$.
~~[illegible]~~
Αφού για κάθε $\lambda(x)\in\mathbb{F}[x]$ από Πρόταση $\lambda(A)=[\lambda(f)]_e^e$ έχουμε ότι $X_A(x)=\mathbb{O}_{\nu\times\nu} \Rightarrow [X_f(f)]_e^e=\mathbb{O}_{\nu\times\nu} \Rightarrow$
$X_f(f)=$ (η μηδενική γραμμ. απεικόνιση $V\to V$)

ΟΡΙΣΜΟΣ 104

Έστω $V\neq\{0_V\}$ διαν. χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$ και $f:V\to V$ γραμμική. Έστω $e=(e_1,\dots,e_\nu)$ διατετ. βάση του V. Ορίζουμε ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)\in\mathbb{F}[x]$ ως εξής $m_f(x)=m_A(x)$ όπου $A=[f]_e^e$. Αφού από Πόρισμα 99 όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο έπεται ότι ο ~~[illegible]~~ ορισμός του $m_A(x)$ δεν εξαρτάται απ' την επιλογή της διατεταγμένης βάσης e στο V.